213. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ ニ就テ III

南雲道夫（阪大）

紙上談話會ノ57号デハ $f(x)$ が純增加連續函數ノ場合ノミヲ考察シタ。次ニ $f(x)$ が純減小連續函數ノ場合ニ函數方程式（$f(x)$ ヲ未知函數, $F(x)$ ヲ既知函數トシテ）

$$(1) \quad f(f(x))=F(x)$$

ヲ考察ショウ。何時デモ純單調連續函數バカリヲ問題ニスルノハ，ソレが可逆的一意連續寫像ヲ與ヘルカラニ他ナラヌ。

$F(x)$ ハ閉區間 $[a, b]$ デ純増加デナケレバナラヌノハ言フマデモナイ。

I. $f(x)$ ガ $[a, b]$ デ定義サレタモノトシ，ソノ反復 $f(f(x))$ ガ $[a, b]$ デ意味ヲ有スルタメ＝ハ，$[a, b]$ デ

$$a \leqq f(x) \leqq b$$

デナケレバナラナイ。故＝ $[a, b]$ ＝於テ少クトモ一ツ $f(x)$ ノ不動点，即チ

$$f(x) = x$$

ナル点ガ存在スル。以上ハ $f(x)$ ガ連続ナコトダカラ成立スル。特＝ $f(x)$ ガ純減小ノ時＝ハ，不動点ハ $[a, b]$ ＝只一ツ存在シ、ソレハ $[a, b]$ ノ内部＝アル。ソノ不動点ヲ c トスル。

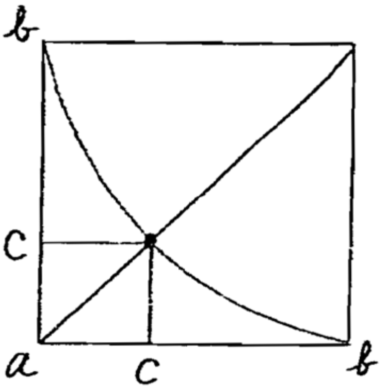
シカラバ

$$a \leqq x \leqq c \text{ ノ時} \qquad c \leqq f(x) \leqq b$$

$$c \leqq x \leqq b \text{ ノ時} \qquad a \leqq f(x) \leqq c$$

［c ハ勿論 $F(x)$ ノ不動点デアル］　以下 $f(a) = b$, $f(b) = a$. 即チ $f(x)$ ハ $[a, b]$ ヲソレ自身ヘ可逆的＝寫ス寫像ヲ與ヘルモノト假定スル。此ノ假定ハ強イ假定デアルガ、此ノ假定ノ成立セヌトキ＝ハ、以下ノ議論ハ不動点 c ノ近傍＝於イテ成立スルモノデアル。（$f(x)$ ガ純増加ノ場合モ同様）

カクテ $f(x)$ ＝ヨリ、區間 $[a, c]$ ト $[c, b]$ トハ互＝交換サレル。



今 $J(x)$ ヲバ、ソノぐらふが $y=x$ ニ對シテ對稱デ純減小デ $J(a)=b$, $J(b)=a$, $J(c)=c$ ナル連續函數，即チ $[a, c]$ ニ於テ $J(x)=J^{-1}(x)$ $J(c)=c$ ナル函數トスル。$\{J(x)$ ハ $[a,c]$ ト $[c, b]$ トヲ交換スル$\}$

ソコデ $\quad fJ(x)=f_1(x), \quad Jf(x)=f_2(x)$

$$JFJ(x)=F_1(x)$$

トオクコトニヨリ，変数ノ區域ヲ全部 $[a, c]$ カラ $[c, b]$ ニ変換スレバ，元ノ方程式ハ $[a, c]$ ニ於テ (1) が成立スルカハリニ，

$[c, b]$ ニ於テ $f_2f_1(x)=F_1(x)$ が成立.

又 $[c, b]$ ニ於テ (1) が成立スルカハリニ，

$[c, b]$ ニ於テ $f_1f_2(x)=F(x)$ が成立スル。

カクテ (1) ノ代リニ $[c, b]$ ニ於ケル聯立方程式

$$\begin{cases} f_2 f_1(x)=F_1(x) \\ f_1 f_2(x)=F_2(x) \end{cases} \qquad [F_2(x)=F(x)]$$

ヲ解クコトニナル。$\{[a,c]$ ニ於テハ $f(x)=f_1J(x)$, $[c, b]$ ニ於テハ $f(x)=Jf_2(x)$ トオケバ，$[a, b]$ ニ於ケル $f(x)$ ヲ得ル$\}$

II. カクテ我々ハ F_1, F_2, f_1, f_2 ヲ純増加函数トシテ

$$\begin{cases} f_2f_1=F_1 \\ f_1 f_2=F_2 \end{cases}$$

ヲ解クコトニナツタ。之カラ

$$f_2 = F_1 f_1^{-1} \quad 及ビ \quad f_2 = f_1^{-1} F_2$$

ヲ得ル。從ツテ

$$F_1 f_1^{-1} = f_1^{-1} F_2$$

或ハ

$$f_1 F_1 f_1^{-1} = F_2.$$

之レハ區間 $c \leqq x \leqq b$, 及ビ $c \leqq y \leqq b$ ヲバ夫々

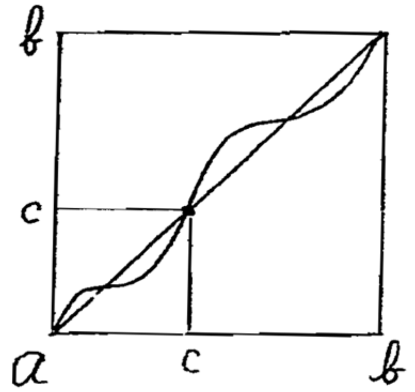
$$x' = f_1(x)$$

$$y' = f_1(y)$$

ニヨツテ同ジ區間 $c \leqq x' \leqq b$, 及ビ $c \leqq y' \leqq b$ ニ寫像シタトキ $y = F_1(x)$ ガ $y' = F_2(x')$ ニ移ルコトヲ示ス。

從ツテ $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ ハ、ソノ両方ノ不動点ノ集合ガ位相幾何学的ニ同型ナルコト及ビソノ相對應スル不動点ノ間ノ區間ニ於テ $F_1(x)$ 及ビ $F_2(x)$ ガ同時ニ x ヨリ大又ハ同時ニ x ヨリ小ナルコトヲ必要トスル。（$f_1(x)$ ガ純増加ナルニヨル）

從ツテ元ノ函數 $F(x)$ ニツイテハ



$y = x$, $y = F(x)$ ナル圖形ガ、$x = c$, $y = c$ ナル点ヲバ位相幾何學的ニ對稱ノ中心トシテ有スルコトガ必要デアル。

逆ニ以上ノ性質ガアル時ニハ

$$f_1 F_1 f_1^{-1} = F_2$$

ハ常ニ解カレル。ソレニハ相對應スル不動点ノ間ノ區間(α_1, β_1)及ビ(α_2, β_2)ニ於テ，夫々

$$\varphi_1(t+1) = F_1(\varphi_1(t)) \qquad \varphi_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$$

$$\varphi_2(t+1) = F_2(\varphi_2(t)) \qquad \varphi_2 \in (\alpha_2, \beta_2)$$

ヲ解ケバ $\varphi_2 \varphi_1^{-1}(x) = f_1(x)$ ガ解デアル。（不動点デハ$x' = f_1(x)$ ニヨリ $F_1(x)$ ノ不動点ガ之ニ對應スル $F_2(x)$ ノ不動点ニ對應スレバヨイ。）

特ニ $F(x)$ ノ不動点ガ有限個ノトキニハ，C ノ両側ニ於ケル不動点ノ数ガ一致シ、ソノ C ノ両側ニ於テ同ジ順番ニ相當スル不動点ノ間ノ區間デハ $F(x) - x$ ノ符号ガ相反スルコトガ問題ノ方程式ガ解ケルタメニ必要且ツ充分デアル（但シ純減小函数ヲ解トスル時）

III. 一般ニ

$$f^k(x) = \underbrace{ff\cdots\cdots f}_{k}(x) = F(x)$$

デ $f(x)$ ガ純減小ナル解ヲ求ムルコトハ k ガ偶数ノ場合ニハ容易デアル。何トナレバ $k = 2l$ トシ $f^2(x) = g(x)$ トオケバ $g(x)$ ハ純増加デアル。故ニ以前ニ論ジタ方法ニヨッテ

$$g^l(x) = F(x)$$

ガ解カレル。$g(x)$ ノ不動点及ビ $g(x) - x$ ノ符号ハ $F(x)$ ノ不動点及ビ $F(x) - x$ ノ符号ト一致スル。カクテ我々ノ問題ハ

$$ff(x)=g(x)$$

ヲ解クコトニ改メラレタ。之ハ本論ニ於テ解決シタモノデアル。kガ奇数ノ場合ハ未ダ解決ヲ得テナイ。諸彦ノ御援助ヲ仰グ次第デアル。

尚ホ最初ノ方法デハ純減少函数ナル解ガ得ラレヌコトハ$\varphi(t)$ガ純単調ナラバ$\varphi(\varphi(x)^{-1}+\theta)$ハ必ズ純増加ナルニヨル。

又$F(x)$ガ純単調ナラバ，$f(x)$モ必ズ純単調デナケレバナラヌコトモ容易ニ分ル。